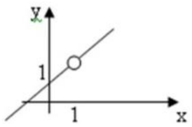
Fungsi Limit

A. DEFINISI

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ artinya setiap x mendekati c dari kedua arah (kanan & kiri), tetapi x ≠ c , sehingga nilai $f(x)$ mendekati L.

Fungsi dikatakan kontinu di x = c, jika $f(c) =$
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x)\ kiri = \lim\limits_{x \to c} f(x)\ kanan$

Sehingga diperoleh contoh rumus berikut



$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

B. TEOREMA LIMIT

Misal n bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g adalah fungsi – fungsi yang memiliki limit di c, maka :

a. $\lim\limits_{x \to c} k = k$

b. $\lim\limits_{x \to c} x = c$

c. $\lim\limits_{x \to c} k \,.\, f(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

d. $\lim\limits_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

e. $\lim\limits_{x \to c} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

f. $\lim\limits_{x \to c} \big(f(x) \,.\, g(x)\big) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to c} g(x)$

g. $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$

h. $\lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to c} f(x))^n$

i. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$,

$dengan \lim\limits_{x \to c} f(x) > 0\ dan\ n\ genap$

C. MENENTUKAN LIMIT FUNGSI ALJABAR

1. Substitusi Langsung

Syarat $f(x) \neq \frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$; $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$: $\lim\limits_{x \to \infty} -\frac{1}{x} = 0$

Contoh :

$\lim\limits_{x \to 1} 3x - 1 = 3(1) - 1 = 2$

2. Pemfaktoran

Syarat $f(x) = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x+3} = \frac{4}{6}$$

3. Merasionalkan Penyebut

Contoh :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2+3} - 2} = \cdots$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} - 2} \, \frac{\sqrt{x^2+3} + 2}{\sqrt{x^2+3} + 2}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)}{(x-1)(x+1)} = 2$$

4. Membagi Pangkat Tertinggi Penyebut

Contoh :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 7x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4x^2 - 6x + 1}{x^2}}{\frac{2x^2 + 7x}{x^2}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{7}{x}} = \frac{4 - \frac{6}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{2 + \frac{7}{\infty}} = \frac{4 - 0 - 0}{2 + 0}$$
$$= 2$$

D. LIMIT TAK HINGGA

1. Limit Berbentuk

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Dapat diselesaikan dengan cara

- Mengalikan dengan akar sekawan (jika berbentuk akar)
- Membagi dengan ordo terendah dari hasil membandingkan pembilang dan penyebut.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}}{px^m + qx^{m-1} + rx^{m-2}} = \cdots$$

- Jika n > m, maka nilainya ∞ atau−∞
- Jika n < m, maka nilainya 0
- Jika n = m, maka nilainya $\frac{a}{p}$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{ax^2 + b} - \sqrt{px + q} = \cdots$$

- Jika a > p, maka nilainya ∞
- Jika a < m, maka nilainya −∞
- Jika a = p, maka nilainya 0

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} = \cdots$$

- Jika a > p, maka nilainya ∞
- Jika a < m, maka nilainya −∞
- Jika a = p, maka nilainya $\frac{b-a}{2\sqrt{a}}$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}} - \sqrt[n]{px^m + qx^{m-1} + rx^{m-2}} = \cdots$$

- Jika a > p, maka nilainya ∞
- Jika a < m, maka nilainya −∞
- Jika a = p, maka nilainya $\frac{b-a}{n\sqrt[n]{a^{n-2}}}$

E. LIMIT TRIGONOMETRI

1. Bentuk $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

f(x) adalah hasil dari subsitusi nilai c ke dalam x dari trigonometri.

Contoh	Nilai Limit
$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin 2x$	$\sin\frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to\pi} \cos\frac{1}{2}x$	$\cos\frac{1}{2}\pi$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$	$\tan\frac{\pi}{2}$

Apabila c = 0, maka rumusnya menjadi :

- $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$
- $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$
- $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$

2. Bentuk $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

Jika disubsitusi dengan nilai c, maka akan menghasilkan f(c) = 0 dan g(c) = 0, sehingga nilainya menjadi bilangan tak tentu $\frac{0}{0}$.

Penyelesaiannya dengan pemfaktoran.

Contoh :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2\cos x \sin x}{\cos x}$$

$$= 2\sin x = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$$

3. Bentuk $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Jika disubsitusi langsung akan menghasilkan bilangan tak tentu.. Bentuk dasar limit ini yaitu :

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} = \infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\cos bx} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax}{bx} = \infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

F. CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Tentukan limit berikut!

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1-2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2}$$

2. Hasil dari limit berikut ini adalah ...

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-5}{4x^2+x+1}$$

Nilai pangkat tertinggi pada pembilang 3 dan nilai pangkat tertinggi penyebut 2 (m > n). Sehingga, nilai limitnya adalah ∞.

3. Hasil dari limit berikut ini adalah ...

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cos(\pi x - 2\pi)}{\tan(2\pi x - 4\pi)}$$

$$= \lim_{x-2\to 2-2} \frac{(x-2)\cos\pi(x-2)}{\tan 2\pi(x-2)}$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{p\,.\cos p\pi}{\tan 2p\pi}$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{p}{\tan 2p\pi} \,.\lim_{p\to 0} \cos p\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cos 0$$

$$= \frac{1}{2\pi}$$