Matriks

A. PENGERTIAN, NOTASI, DAN ORDO MATRIKS

- Matriks adalah susunan bilangan yang diatur dalam baris dan kolom berbentuk persegi panjang.
- Susunan bilangan dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Susunan elemen yang mendatar disebut **baris**, sedangkan susunan yang tegak disebut **kolom**.
- Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut **matriks berordo *m* × *n***.

B. TRANSPOS MATRIKS

- Transpos matriks *A* yang berordo $m \times n$ adalah matriks A^T yang berordo $n \times m$.
- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

C. KESAMAAN DUA MATRIKS

- Dua matriks *A* dan *B* disebut sama jika:
  1. Memiliki ordo matriks yang sama
  2. Memiliki elemen seletak yang sama

D. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN MATRIKS

- **Penjumlahan Matriks**

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix}$$

- **Pengurangan Matriks**

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & c-g \\ b-f & d-h \end{bmatrix}$$

E. PERKALIAN BILANGAN REAL (SKALAR) DAN MATRIKS

- Hasil perkalian bilangan real *c* dengan matriks *A*, ditulis *cA*, adalah matriks dengan setiap elemennya diperoleh dari perkalian setiap elemen dari matriks *A* dengan *c*.
- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

F. PERKALIAN MATRIKS

- Perkalian matriks berordo *m* x *n* dengan ordo *n* x *p* menghasilkan matriks berordo *m* x *p*.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bh & af+bi & ag+bj \\ ce+dh & cf+di & cg+dj \end{bmatrix}$$

- **Sifat Perkalian Matriks**
  1. Sifat Asosiatif
     $(AB)C = A(BC)$
  2. Matriks Satuan (Identitas)
     $A \times I = I \times A = A$
  3. Sifat Distributif
     $A(B+C) = AB + AC$
     $(B+C)A = BA + CA$

G. DETERMINAN MATRIKS

- Determinan matriks *A* bisa ditulis dengan tanda $\det(A)$, $\det A$, $|A|$
- **Determinan Matriks Ordo 2 x 2**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{ad - bc}$$

- **Determinan Matriks Ordo 3 x 3**

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{detA = |A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi}$$

H. ADJOIN MATRIKS

- Adjoin adalah tranpos matriks dari suatu kofaktor suatu matriks persegi.
- **Adjoin Matriks Ordo 2 x 2**

$$\boldsymbol{Adj\ A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-c} \\ \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

- **Adjoin Matriks Ordo 3 x 3**

$$\boldsymbol{Adj\ A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^t$$
$$= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

I. INVERS MATRIKS

- Misal *A* adalah matriks berukuran $n \times n$. Matriks persegi B berukuran $n \times n$ disebt invers (kebalikan) matriks A jika $BA = AB = I_n$.
- **Rumus Umum Invers Matriks**

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,Adj\ A}$$

- **Invers Matriks Ordo 2 x 2**

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

Invers Matriks Ordo 3 x 3

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

J. PERSAMAAN MATRIKS

- Persamaan matriks dapat diselesaikan menggunakan sifat invers matriks dan matriks satuan:
  $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$ dan $IX = XI = X$
- Jika $AX = B$, maka $A^{-1}AX = A^{-1}B$
  $IX = A^{-1}B$
  $X = A^{-1}B$
- Jika $XA = B$, maka $XAA^{-1} = BA^{-1}$
  $XI = BA^{-1}$
  $X = BA^{-1}$

K. RUMUS CRAMER

- $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$

  Jika $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$, maka

  $x = \frac{det\begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ dan $y = \frac{det\begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$

L. CONTOH SOAL

1. Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, maka matriks $A + B$ adalah...

Penyelesaian:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & -3+2 & 5+7 \\ 1+8 & 0+1 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 12 \\ 9 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, maka matriks AB adalah...

Penyelesaian:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2-3-3 & -2+2+6 \\ -4+6+0 & 4-4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Tentukan matriks $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jika $AX = B$!

Penyelesaian:

$$A^{-1} = \frac{1}{5.2 - 3.3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

4. Perhatikan persamaan berikut!
   $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x + 7y = -3 \end{cases}$

   Dengan menggunakan matriks, tentukan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut!

Penyelesaian:

$$det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 3(7) - (-2)(4) = 29 \neq 0$$

$$x = \frac{det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}} = \frac{28-6}{29} = \frac{22}{29}$$

$$y = \frac{det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}} = \frac{-9-16}{29} = -\frac{25}{29}$$