Turunan Fungsi Aljabar

A. DEFINISI TURUNAN (DERIVATIF)

Diketahui fungsi $y = f(x)$ dengan titik a di daerah definisi(domain) fungsi. Jika nilai limit $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ada, maka nilai tersebut disebut sebagai nilai turunan fungsi f di titik a dan ditulis sebagai $f'(a)$. Turunan fungsi dalam notasi Leibnitz dinyatakan dengan $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(a)$

B. FUNGSI TURUNAN

Untuk setiap titik x, nilai fungsi turunannya adalah sebagai berikut.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Asalkan nilai limit ini ada. Fungsi baru ini dinyatakan sebagai f' dan disebut sebagai fungsi turunan

C. TURUNAN DAN KEKONTINUAN FUNGSI

Jika f mempunyai turunan di a, maka fungsi tersebut harus kontinu, sebab:

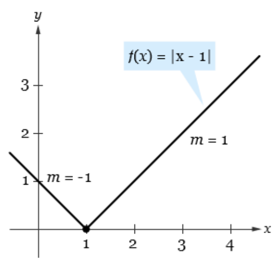
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) - f(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)\\ &= f'(a).0 = 0\end{aligned}$$

Atau $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Tetapi tidak semua fungsi kontinu memiliki turunan

Dua contoh fungsi kontinu yang tidak mempunyai turunan :

a. Di $x = a$ terjadi tekukan. Contoh $f(x) = |x-1|$



Fungsi $f(x) = |x-1|$ merupakan fungsi yang kontinu di $x = 1$ akan tetapi

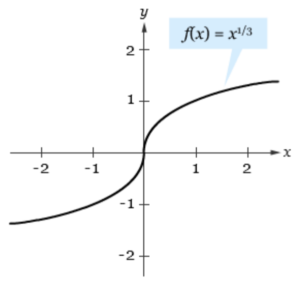
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|-0}{x-1} = -1$$

dan

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|-0}{x-1} = 1$$

Tidak sama, sehingga f tidak memiliki turunan di $x = 1$ dan grafiknya tidak memiliki garis singgung di titik (1,0)

b. Di $x = a$ mempunyai potongan vertikal. Contoh $f(x) = \sqrt[3]{x}$



Fungsi $f(x) = \sqrt[3]{x}$ kontinu pada $x = 0$

Akan tetapi karena limit

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{h\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}-0}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

Tak terhingga, dapat disimpulkan bahwa garis singgungnya vertikal Ketika $x = 0$. Sehingga, f tidak memiliki turunan pada $x = 0$

D. SIFAT-SIFAT TURUNAN FUNGSI ALJABAR

1. Jika $f(x) = c$, maka $f'(x) = 0$
2. Jika n bilangan real dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$
3. Diketahui fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Jika $p(x) = f(x) \pm g(x)$, maka :
   $p'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
4. Diketahui fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Jika $p(x) = f(x).g(x)$, maka :
   $p'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$
5. Diketahui fungsi $f(x)$ dan c bilangan real. Jika $p(x) = cf(x)$, maka :
   $p'(x) = cf'(x)$
6. Diketahui fungsi $f(x)$ dan c bilangan real. Jika $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dan $p(x)$ mempunyai turunan, maka :
   $p'(x) = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

E. ATURAN RANTAI DALAM MENCARI TURUNAN FUNGSI KOMPOSISI

Seperti kita ketahui bahwa untuk fungsi $y = p(x)$, maka turunan fungsi $p(x)$ dinyatakan dengan:

$$\frac{dy}{dx} = p'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x)-p(x)}{\Delta x}$$

yaitu limit dari perubahan rata-rata nilai p (atau y) jika x berubah. Kita menyebut ini sebagai turunan fungsi p terhadap x.

Misalkan $y = g(u)$ dan $u = f(x)$ masing-masing mempunyai turunan, maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

atau misalkan $y = p(x = g[f(x)]$, maka:

$$p'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

F. FUNGSI TURUNAN PANGKAT PECAHAN

Secara umum, jika n bilangan bulat $p(x) = [f(x)]^n$, maka:

$$p'(x) = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

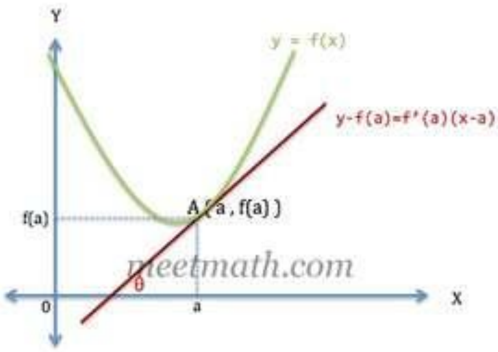
G. APLIKASI TURUNAN FUNGSI ALJABAR PADA GARIS SINGGUNG KURVA

Berdasarkan definisi turunan, kita mengetahui bahwa:

$$f'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Jadi, jika x cukup dekat dengan a, maka:

$$f'(a) \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



H. APLIKASI TURUNAN FUNGSI ALJABAR PADA GARIS NORMAL KURVA

Garis normal di suatu titik $(a, f(a))$ pada grafik $y = f(x)$ adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung di titik tersebut.
Oleh karena itu, persamaan normal di titik $\left(a, f(a)\right)$ terhadap grafik $y = f(x)$:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Contoh soal:

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = 2x - 9$ dengan menggunakan limit fungsi.

Jawab :

$f(x) = 2x - 9$
Maka $f(x + h) = 2(x + h) - 9$

Berdasarkan definisi turunan yang berkaitan dengan limit fungsi, diperoleh:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 9 - (2x - 9)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

2. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = 2x - 9$ dengan menggunakan limit fungsi.

Jawab :
$f(x) = 2x - 9$
Maka $f(x + h) = 2(x + h) - 9$
Berdasarkan defnisi turunan yang berkaitan dengan limit fungsi, diperoleh:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 9 - (2x - 9)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

3. $p(x) = x^4 + 3, p'(x) = \cdots$

Jawab :
$p'(x) = f'(x) + g'(x) = 4x^3 + 0 = 4x^3$

4. Diketahui $f(x) = x^3 + 4$
$g(x) = x^2 + 1$,dan $p(x) = f(x)g(x)$, maka $=p'(x) = \cdots$

Jawab :
$f'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2$ dan $g'(x) = 2x + 0 = 2x$

$$p'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$$
$$= (x^3 + 4)(2x) + (3x^2)(x^2 + 1)$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 8x$$

5. $p(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 2x}$, $p'(x) = \cdots$

Jawab :

$$p'(x) = \frac{(3x^2)(x^2 + 2x) - (x^3 - 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2}$$
$$= \frac{x^4 + 4x^3 + 4x + 4}{(x^2 + 2x)^2}$$

6. Diketahui fungsi, $u = f(x) = x^2$ dan $y = g(x) = x^3$. Tentukan $p'(x)$!

Jawab: $p'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$
$= [g'(x^2 + 1)] \cdot (2x)$
$= [3(x^2 + 1)] \cdot (2x)$
$= 6x(x^2 + 1)$

7. Tentukan turunan dari fungsi $g(x) = \sqrt[3]{x}$!

Jawab: $g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{[g(x)]^2}$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

8. Tentukan persamaan garis singgung pada grafik fungsi $y = x^2$ di titik $x = 2$!

Jawab:

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = 2x = 2 \cdot 2 = 4$$

Persamaan garis singgung pada grafik fungsi $y = x^2$ di titik $x = 2$:

$$y = f(2) + f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$= 4 + 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 4$$

Jadi, persamaan garis singgung pada grafik fungsi $y = x^2$ di titik $x = 2$ adalah $y = 4x - 4$

9. Tentukan persamaan garis singgung grafik fungsi $y = x^3 - 3x + 2$ pada titik $(2,4)$!

Jawab: $y' = 3x^2 - 3$

Maka, nilai turunan pada $x = 2$ adalah:

$$m = y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 9(x - 2)$$

$$9x - y - 14 = 0$$