Transformasi Geometri

A. PENGERTIAN

Transformasi geometri adalah perubahan pada sebuah bidang geometri yang mencantum posisi, , besar, dan bentuknya sendiri yang didasarkan dengan gambar dan matriks.

Digunakan untuk memindahkan suatu titik atau bangun pada suatu bidang.

Transformasi pada bidang terdiri dari 4 macam :

- Pergeseran (Translasi)
- Pencerminan (Refleksi)
- Perputaran (Rotasi)
- Perkalian (Dilatasi)

B. PERGESERAN (TRANSLASI)

Dinotasikan $\binom{a}{b}$ maka jika titik A(x,y) ditranslasikan menjadi :

$$\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \binom{a}{b} \; atau \; A(x,y) \to A'(x+a, y+b)$$

Contoh : Bayangan titik (3,-7) oleh translasi $\binom{4}{2}$ adalah ...

Jawab : $A(3,-7) \to A'(3+4, -7+2) = A'(7,-5)$

C. PENCERMINAN (REFLEKSI)

Transformasi yang memindahkan titik-titik dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin.

1. Terhadap sumbu X

$$A(x,y) \to A'(x,-y)$$

Persamaan matriksnya :

$$\binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \binom{x}{y} \; dengan \; \begin{matrix} x = x' \\ -y = y' \end{matrix}$$

2. Terhadap sumbu Y

$$A(x,y) \to A'(-x,y)$$

Persamaan matriksnya :

$$\binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{x}{y} \; dengan \; \begin{matrix} -x = x' \\ y = y' \end{matrix}$$

3. Terhadap titik asal 0(0,0)

$$a(x,y) \to A'(-x,-y)$$

Persamaan matriksnya :

$$\binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \binom{x}{y} \; dengan \; \begin{matrix} -x = x' \\ -y = y' \end{matrix}$$

4. Terhadap garis Y = X

$$A(x,y) \to A'(y,x)$$

Persamaan matriksnya :

$$\binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \binom{y}{x} \; dengan \; \begin{matrix} y = x' \\ x = y' \end{matrix}$$

5. Terhadap garis Y = -X

$$A(x,y) \to A'(-y,-x)$$

Persamaan matriksnya :

$$\binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \binom{x}{y} \; dengan \; \begin{matrix} -y = x' \\ -x = y' \end{matrix}$$

6. Terhadap garis x = a

$$A(x,y) \to A'(2a-x, y)$$

7. Terhadap garis y = b

$$A(x,y) \to A'(x, 2b-y)$$

8. Terhadap titik (a,b)

$$A(x,y) \to A'(2a-x, 2b-y$$

9. Terhadap garis y = mx+c

$$\binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix} \binom{x-0}{y-c} + \binom{0}{c}$$

Contoh : Titik A(-2,5) dicerminkan terhadap garis y = x. Koordinat bayangan A adalah...

Jawab :

$$\binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \binom{-2}{5}$$

$$\leftrightarrow \binom{x'}{y'} = \binom{5}{-2}$$

Atau $A(-2,5) \to A'(5,-2)$

D. PERPUTARAN (ROTASI)

Arah rotasi :

- Jika perputaran dengan arah putar jarum jam, maka rotasi bernilai positif(+)
- Jika perputaran searah dengan jarum jam, maka rotasi bernilai negatif(-)

Suatu Rotasi dengan pusat P dan sudut rotasi θdinotasikan dengan R(P, θ).

1. Rotasi Terhadap titik pusat O(0,0)

Jika titik P(x,y) diputar sebesar θ berlawanan arah jam terhadap titik pusat O(0,0) maka diperoleh bayangan P'(x', y')

R(O,θ) : $P(x,y) \to P'(x',y') = P'(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

Persamaan matriksnya :

$$\binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \binom{x}{y}$$

2. Rotasi terhadap titik pusat P(a,b)

Jika suatu titik P(x,y) diputar sejauh θ berlawanan arah jam terhadap titik pusat A(a,b) maka bayangannya adalah

$P'(x',y')$ *dengan* :

$$x' - a' = (x-a)\cos\theta - 9y - b)\sin\ \theta$$

$$y' - b = (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta$$

Persamaan matriksnya :

$$\binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \binom{x-a}{y-b} + \binom{a}{b}$$

Untuk $\theta = 90°, -90°, 180°, 270°, -270°$ dengan memasukkan nilai θ tersebut didapat dari tabel sebagai berikut :

Rotasi	Bayangan	Matriks
R(O, 90°)	(-y, x)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
R(O, -90°)	(y, -x)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
R(O, 180°)	(-x, -y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
R(O, 270°)	(y, -x)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
R(O, -270°)	(-y, x)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Contoh : Titik B(1,3) dirotasika terhadap titik (0,0). Tentuka Bayangan titik B apabila titik B dirotasikan sejauh 90° berlawanan arah dengan jarum jam

Jawab :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D. PERKALIAN (DILATASI)

- Pusat dilatasi terdiri atas dua, yaitu di titik o(0,0) dan di titik A(x,y).
- Faktor dilatasi dapat bersifat positif(perbesarannya earah) dan dapat pula bersifat negatif(perbesaran berlawanan arah.
- Merupakan faktor skala.

1. Dilatasi terhadap titik pusat O(0,0)
   Pemetaannya :
   $(O, k) : P(x, y) \to P'(kx, ky)$
   Persamaan matriksnya :
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
2. Dilatasi terhadap titik pusat A(a,b)
   Titik P(x,y) dilatasi terhadap titik pusat A(a,b) dengan faktor skala k, didapat bayangan P'(x',y') dengan :
   $$x' - a = k(x - a) \; dan \; y' - b = k(y - b)$$
   Persamaan matriksnya :
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh : Bayangan titik B(1,3) dilatasi terhadap titik pusat O(0,0) dengan faktor skala 2 adalah ...

k = 2, x = 1, y = 3 masukan ke dalam matriks :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Didapat : x = 2 dan y = 6. → B(2,6)

E. TRANSFORMASI SUATU MATRIKS

Suatu titik A(x,y) ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ menjadi A(x,y)

Persamaan matriks :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh : Hasil transformasi matriks $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ terhadap titik B(2,-3) adalah ...

Jawab :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Jadi B adalah (-8,-9).

F. KOMPOSISI TRANSFORMASI

Merupakan pengerjaan 2 atau lebih transformasi secara berurutan. $T_1 o\, T_2$ artinya T_1 dilanjutkan T_2 terhadap suatu titik A.

1. Komposisi Dua Translasi
   Jika $T_1 = \binom{a}{b}$ dan $T_2 = \binom{c}{d}$ maka :
   $$T = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$
   Sifat - sifat translasi :
   - $T_1 \,^{o}\, T_2 = T_2 \,^{o}\, T_1$ (komutatif)
   - $(T_1 \,^{o}\, T_2) \,^{o}\, T_3 = T_1 \,^{o}\, (T_2 \,^{o}\, T_3)$ (asosiatif)

Contoh :

1) Titik A (6,3) ditranslasikan oleh $T_1 = \binom{2}{-3}$ dilanjutkan $T_2 = \binom{-1}{4}$. Bayangan titik A adalah ...

Jawab :

$$T = T_2 \,^{o}\, T_1$$
$$= \begin{pmatrix} -1 + 2 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

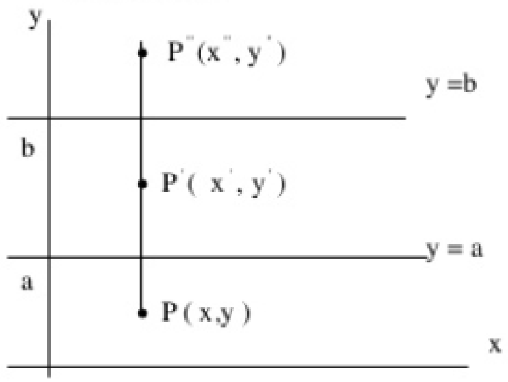
Maka, bayangannya adalah A′(7,4)

2. Komposisi Refleksi

- Komposisi dua refleksi terhadap sumbu-sumbu sejajar

1) Sejajar terhadap sumbu x

Jika titik $P(x',y')$ adalah hasil pencerminan terhadap garis $y = a$ dan titik $P(x',y")$ adalah hasil pencerminan titik $P'(x',y')$ terhadap garis $y = b$.



$$P(x,y) \xrightarrow{y=a} P'(x, 2a-y)$$

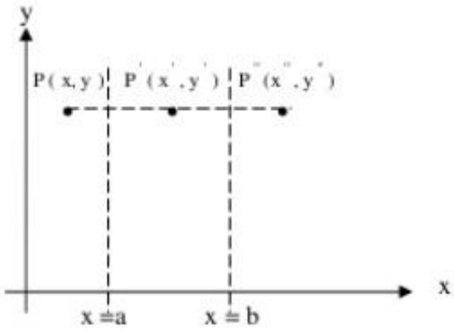
$$P'(x, 2a-y) \xrightarrow{y=b} P''(x, 2b-(2a-y))$$
$$P''(x, 2(b-a)+y)$$
$$P''(x, 2d+y)$$

$d = b - a$ → jarak antara dua sumbu yang sejajar. Jika transformasi pencerminan terhadap garis $y = a$ disebut dengan $M_{y=a}$ dan transformasi pencerminan terhadap garis y = b disebut dengan $M_{y=b}$, maka :

$$P(x,y) \xrightarrow{M_{y=b} \circ M_{y=a}} P''(x, 2(b-a)+y)$$

2) Sejajar terhadap sumbu y

Jika $P(x',y')$ adalah hasil pencerminan terhadap garis $x = a$ dan titik $P'(x',y")$ adalah hasil pencerminan titik $P'(x',y')$ terhadap garis $x = b$.



$$P(x,y) \xrightarrow{x=a} P'((2a-x), y)$$

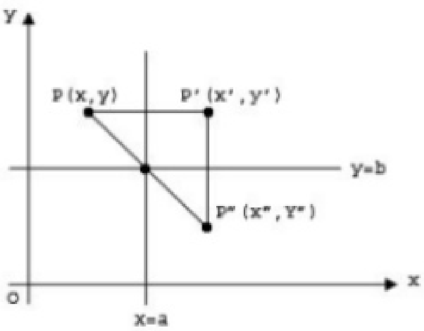
$$P'(2a-x, y) \xrightarrow{x=b} P''(2b-(2a-x), y)$$
$$P''((2b-2a)+x, y)$$
$$P''(2(b-a)+x, y)$$
$$P''(2d+x, y)$$

d = b − a → jarak antara dua sumbu yang sejajar.

$$P(x,y) \xrightarrow{M_{x=b} \circ M_{x=a}} P''(2(b-a)+x,\ y)$$

- Komposisi dua refleksi terhadap sumbu-sumbu saling tegak lurus.

Jika titik $P'(x',y')$ adalah hasil pencerminan titik $P(x,y)$ terhadap garis $x = a$ dan titik $P"(x",y')$ adalah hasil pencerminan titik $P'(x',y')$ terhadap garis $y = b$.



Maka:

$$P(x,y) \xrightarrow{x=a} P'((2a-x), y)$$

$$P'(2a-x, y) \xrightarrow{y=b} P''(2a-x, 2b-y)$$

Jadi

$$P(x,y) \xrightarrow{M_{y=b} \circ M_{x=a}} P'(2a-x, 2b-y)$$

Pencerminan terhadap dua sumbu yang saling tegak lurus ekuivalen dengan rotasi pusat perpotongan dua sumbu & sudut putar 180°

$$M_{y=b} \circ M_{x=a} = R((a,b),180°)$$

- Komposisi dua refleksi terhadap sumbu-sumbu saling berpotongan.
  Pencerminan terhadap dua sumbu yang saling berpotongan akan menghasilkan rotasi yang bersifat :
  a. Titik potong kedua sumbu refleksi adalah pusat perputaran.
  b. Besar sudut putar adalah dua kali sudut antara kedua sumbu pencerminan.
  c. Arah perputaran = arah dari sumbu pertama ke sumbu kedua.

$$M_2 \circ M_1 = R\ (T, 2\theta)$$

Ket : - T : titik potong kedua sumbu

- θ : sudut antara kedua sumbu

- Komposisi Rotasi
  Dua rotasi berurutan yang sepusat ekuivale dengan rotasi sejauh jumlah kedua sudut rotasinya terhadap pusat yang sama.
  Jika $R_1 = R\ (0, \theta)$ dan $R_2 = R\ (0, \beta)$ maka :
  $$R_2 \circ R_1 = R\ (0, (\theta + \beta))$$

G. KOMPOSISI TRANSFORMASI DENGAN MATRIKS

Jika T_1 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan T_2 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks $M_2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ maka komposisi transformasi :

1. $T_2 \circ T_1$ adalah perkalian matriks $M_2 \ . \ M_1$
   $$M_2 \ . \ M_1 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
2. $T_1 \circ T_2$ adalah perkalian matriks $M_1 \ . \ M_2$
   $$M_1 \ . \ M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

H. LUAS DAERAH BANGUN HASIL TRANSFORMASI

Jika matriks transformasi $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

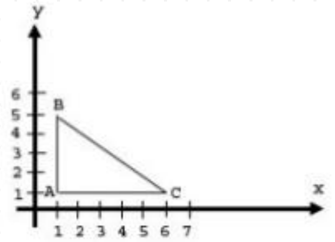
Mentransformasikan bangun A menjadi bangun A', maka..

Luas Bangun A' = |det T| x luas bangun A |det T| dinamakan faktor perbesaran luas, merupakan nilai mutlak determinan matriks T.

Contoh :

Diketahui segitiga ABC dengan koordinat A (1,1), B (1,5), C (6,1). Berapa luas bayangan segitiga ABC oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$?

Jawab :



Diketahui $\Delta\ ABC$:

Alas = AC = 5 : tinggi = AB = 4

Luas Δ ABC = $\frac{1}{2}$ alas x tinggi

= $\frac{1}{2}$ x 5 x 4

= 10 satuan

Δ ABC yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Misal matriks ini adalah T, maka :

|det T| = $|1.2 - 3(-2)|$= $|2 + 6|$= 8

Luas bayangan Δ ABC = |det T| x Luas Δ ABC

= 8 x 10

= 80 satuan luas.

Soal latihan :

1. Jika pencerminan titik P (s,t) terhadap garis x = a dan dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis y = b menghasilkan dilatasi sebesar 3 kali maka ab ?
2. Diketahui gradien garis yang melalui titik O (0,0) dan P (a,b) adalah -2. Jika P dicerminkan terhadap sumbu x kemudian digeser 5 satuan ke bawah dan 1 satuan ke kiri, maka gradien garis yang mealui P' dan O (0,0) adalah -1. Titik P adalah ?
3. Koordinat bayngan segmen garis AB dengan A (2,2) dan B (4,-2) oleh dilatasi dengan faktor dilatasi k = 3 dan pusat dilatasi O adalah ?
4. Bayangan ΔABC dengan A (2,1), dan B (6,1) C (5,3) karena refleksi terhadap sumbu y dilanjutkan rotasi (0,90°) adalah ?
5. Persamaa bayangan garis y = 5x -3 karena rotasi dengan pusat O (0,0) bersudut -90° adalah ?
6. Persamaann bayangan garis y = 2x -3 karena refleksi terhadap garis y = -x dilanjutkan refleksi terhadap y = x adalah ?

7. Sebuah garis 3x + 2y = 6 di translasikan dengan matriks $\binom{3}{-4}$ dilanjutkan dilatasi dengan pusat di O dan faktor 2. Hasil transformasinya adalah ?
8. Persamaan bayangan dari garis y = 3x + 2 oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dilanjutkan dengan rotasi pusat O (0,0) sebesar 90° adalah ?
9. Bayangan dari titik B (3,-5) oleh pencerminan terhadap garis y = -2 adalah ?
10. Tentukan bayangan titik (5,-3) oleh rotasi R (P,90°) dengan koodinat titik P (-1,2) ?