Barisan dan Deret

A. BARISAN ARITMETIKA

adalah barisan bilangan dengan selisih dua suku berurutan tetap.

Contoh: 3, 7, 11, 15, 19, 23, …

Suku ke-n barisan aritmetika, $a, a+b, a+2b, \dots$, adalah

$$U_n = a + (n-1)b$$

Dan berlaku:

$$U_n - U_{n-1} = b$$

Contoh Soal

1. 3, 9, 15, 21, 27, 33, …
   Tentukan suku ke-251!
   $U_{251} = 2 + 250 \cdot 6$
   $= 2 + 1500$
   $= 1502$

Suku Tengah Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika dengan banyak suku ganjil selalu memiliki suku tengah yang dinotasikan dengan U_t.

$$U_t = \frac{1}{2}(a + U_n)$$

dengan U_n adalah suku terakhir dan $t = \frac{n+1}{2}$.

Contoh Soal

1. Suku tengah suatu barisan aritmetika bernilai 15. Jika banyak suku barisan dan suku ke-4 berturut-turut 11 dan -3, nilai suku terakhirnya adalah…

$$U_f = \frac{1}{2}(a + U_n)$$

$$t = \frac{(11+1)}{2}$$
$$= 6$$

$U_6 = a + 5b = 15$
$U_4 = a + 3b = -3$

$U_6 - U_4 = 2b = 18$
$b = 9 \quad dan \quad a = -30$

$U_{11} = a + 10b$
$= -30 + 10 \cdot 9$
$= 60$

Deret Aritmetika

Diketahui barisan aritmetika:
$U_1 = a, U_2 = a + b, \dots, U_n = a + (n-1)b$,
Kita dapat menjumlahkan suku-suku dari barisan aritmetika tersebut, yaitu:
$S_1 = U_1 = a$
$S_2 = U_1 + U_2$
$S_3 = U_1 + U_2 + U_3$

Teknik Gauss

$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
$S_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

Selanjutnya, dengan menjumlahkan kedua bentuk tersebut menjadi:
$2S_{10} = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$
$S_{10} = \frac{(10 \cdot 11)}{2} = 55$
Sehingga didapatkan rumus,

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \text{ atau}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

Contoh Soal

1. 4, 7, 10, 13, …
   Tentukan suku ke-10 dari deret aritmetikanya!
   $S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 4 + 9 \cdot 3)$
   $= 5(8 + 27)$
   $= 175$

B. BARISAN GEOMETRI

Suatu barisan bilangan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ disebut sebagai barisan geometri apabila terdapat bilangan tetap $r \neq 0$ sedemikian sehingga:

$r = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

Untuk $n \in$ bilangan asli dan $n \geq 1$

Contoh barisan geometri :

3,9,27,81,... merupakan barisan geometri karena $\frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = 3$

Suku ke-n Barisan Geometri :

$U_n = a \times r^{n-1}$

Dimana a adalah suku pertama barisan

Suku Tengah Barisan Geometri

$U_t = \sqrt{a.U_n}$

Dimana U_n suku terakhir, dan $t = \frac{n+1}{2}$

Barisan Geometri Tak Hingga

Baris geometri tak hingga dibagi menjadi:

1) **Baris geometri tak hingga divergen**

Nilai sukunya membesar, tidak memiliki limit jumlah, rasio r < -1 atau r > 1 (bukan pecahan).

2) **Baris geometri tak hingga konvergen**

Nilai sukunya mengecil, memiliki limit jumlah, rasio -1 < r < 1 dan r ≠0 (pecahan)

Deret Geometri Hingga

Jumlah n suku pertama dari suku-suku pada barisan geometri, dinotasikan $\boldsymbol{S_n}$ dimana

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ atau $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

Dimana $r \neq 1$

Deret Geometri Tak Hingga

Penjumlahan tak hingga suku-suku barisan geometri, hasilnya dinotasikan dengan S_∞, dimana

$S_\infty = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots$

$S_\infty = a + ar + ar^2 + \cdots$

Jika $-1 < r < 1$, maka nilai $r^2, r^3, \dots$ akan semakin kecil, sehingga :

$n \to \infty$, maka $r^n \to 0$

Oleh karena itu untuk $-1 < r < 1$ dan $n \to \infty$, maka

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Sebab jika $n \to \infty$, maka $r^n \to 0$

Dapat diperoleh : $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

untuk $-1 < r < 1$

Jika baris geometri disisipkan k buah bilangan, akan terbentuk baris geometri baru.

BG : $U_1 \quad r \quad U_t \quad r \quad U_n$

r'

BG': U_1 0 0 0 U_t 0 0 0 U_n

$k\ bilangan$

Perubahan yang terjadi:

1) Suku pertama, tengah dan akhir sama dengan barisan sebelumnya.

2) Banyak suku baru menjadi

$n' = n + (n-1)k$

3) Rasio baris baru menjadi

$r' = \sqrt[k+1]{r}$ (k ganjil)

$r' = \sqrt[k+1]{r}\ atau\ r' = -\sqrt[k+1]{r}$ (k genap)

Contoh Soal

- Bila rasio dari barisan geometri $2m, 2m+1, 2p$ adalah 3 maka nilai p-m=?

  Jawab :

  diketahui $r = 3$, maka

  $\frac{2m+1}{2m} = 3$

  $2m + 1 = 6m$

  $4m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{4}$

  $\frac{2p}{2m+1} = 3$

  $\frac{2p}{\frac{1}{2}+1} = 3$

  $2p = \frac{9}{2} \rightarrow p = \frac{9}{4}$

  $\therefore p - m = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$

- Diketahui jumlah n suku pertama pada barisan geometri $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+2} - 9)$ maka rasio barisan itu adalah...

  Jawab :

  Diketahui $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+2} - 9)$, maka

  $S_1 = U_1 = \frac{1}{2}(3^{1+2} - 9)$

  $= \frac{1}{2}(27 - 9) = 9$

  $S_2 = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}(3^{2+2} - 9)$

  $= \frac{1}{2}(81 - 9) = 36$

  $9 + U_2 = 36$

  $U_2 = 27$

  $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{27}{9} = 3$

- Jumlah tak hingga deret geometri $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \ldots$ Adalah...

  Jawab :

  Suku Pertama (a) = $\log_2 x$

  $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\log_4 x}{\log_2 x}$

  $r = \frac{\log_{2^2} x}{\log_2 x} = \frac{1}{2}$

  Sehingga, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\log_2 x}{1-\frac{1}{2}} = 2\log_2 x$