Logaritma

A. DEFINISI LOGARITMA

Logaritma adalah kebalikan dari pemangkatan, logaritma didefinisikan sebagai berikut

Misalkan $a, b, c \in R, a > 0, a \neq 1$, dan $c > 0$, maka berlaku jika $a^b = c$ maka $\log_a c = b$
Keterangan :
a = bilangan pokok (basis), syarat : $a > 0$ dan $a \neq 1$
c = numerus, syarat : $c > 0$
b = hasil/nilai logaritma
Note : Basis 10 biasanya tidak dituliskan, $\log_{10} x = \log x$

B. SIFAT – SIFAT LOGARITMA

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
2. $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
3. $\log_a x^m = m \log_a x$
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
5. $\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x a}$
6. $\log_a x \times \log_x y = \frac{1}{\log_x a} \times \log_x y = \frac{\log_x y}{\log_x a} = \log_a y$
7. $\log_{a^m} x^n = n \log_{a^m} x = n \frac{\log_a x}{\log_a a^m} = n \frac{\log_a x}{m} = \frac{n}{m} \log_a x$
8. $a^{\log_a x} = x$
   Pembuktian :
   Misal $\log_a x = m$, maka $x = a^m$, oleh karena itu diperoleh $a^{\log_a x} = a^m = x$

Contoh Soal

1. $\log_6 12 + \log_6 3 = \cdots$
   Solusi : $\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 36 = \mathbf{2}$
2. Jika $\log 5 = a$, maka $\log 2 = \cdots$
   Solusi : $\log 2 = \log \frac{10}{5}$
   $= \log 10 - \log 5$
   $= \mathbf{1 - a}$
3. $\log_2 4\sqrt{2} = \cdots$
   Solusi : $\log_2 4\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$
4. Jika $\log_2 3 = a, \log_3 7 = b$, maka $\log_{21} 12 = \cdots$
   Solusi : $\log_{21} 12 = \frac{\log_3 12}{\log_3 21} = \frac{\log_3 4 + \log_3 3}{\log_3 7 + \log_3 3}$
   Karena $\log_2 3 = a$, maka $\log_3 2 = \frac{1}{a}, \log_3 4 = \log_3 2^2 = \frac{2}{a}$
   $\therefore \frac{\log_3 4 + \log_3 3}{\log_3 7 + \log_3 3} = \frac{2/a + 1}{b + 1} = \frac{\mathbf{a + 2}}{\mathbf{a(b + 1)}}$
5. Jika $\log_2 3 = x$, maka $\log_n 6 \times \log_2 n = \cdots$
   Solusi : $\log_n 6 \times \log_2 n = \log_2 n \times \log_n 6$
   $= \log_2 6 =$
   $\log_2 2 + \log_2 3 = \mathbf{1 + x}$
6. $\log_8 4 = \cdots$
   Solusi : $\log_8 4 = \log_{2^3} 2^2$
   $= \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$
7. $2^{\log_4 6} = \cdots$
   Solusi : $2^{\log_{2^2} \sqrt{6}^2} = 2^{\log_2 \sqrt{6}} = \mathbf{\sqrt{6}}$

C. PERSAMAAN LOGARITMA

Bentuk Persamaan Logaritma :

a. $\log_a f(x) = \log_a b \rightarrow f(x) = b$
   Dengan $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$, dan $b > 0$
b. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \rightarrow f(x) = g(x)$
   Dengan $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$, dan $g(x) > 0$
c. $\log_a f(x) = \log_b f(x) \rightarrow f(x) = 1$
   Dengan $a, b > 0, a, b \neq 1, a \neq b$, dan $f(x) > 0$
d. $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \rightarrow g(x) = h(x)$
   Dengan $f(x) \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0$, dan $h(x) > 0$
e. $\log_{f(x)} h(x) = \log_{g(x)} h(x) \rightarrow f(x) = g(x), h(x) = 1$
   Dengan $h(x) > 0, f(x) \neq 1, f(x) > 0, g(x) \neq 1$ dan $g(x) > 0$
f. $A(\log_a f(x))^2 + B \log_a f(x) + C = 0$

Contoh Soal

1. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\log_5(3x - 8) = 0$
   Solusi : $3x - 8 = 1$
   $3x = 9$
   $\therefore \mathbf{x = 3}$
2. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\log(x^2 - x - 10) = \log 2x$
   Solusi : $x^2 - x - 10 = 2x$
   $x^2 - 3x - 10 = 0$
   $(x - 5)(x + 2) = 0$
   $\therefore \mathbf{x = -2}$ **atau** $\mathbf{x = 5}$
3. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\log_2(50 - 7x) = \log_3(50 - 7x)$
   Solusi : $50 - 7x = 1$
   $7x = 49$
   $\therefore \mathbf{x = 7}$

4. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\log_{2x+1}(x^2-10) = \log_{2x+1}(5-2x)$

Solusi : $x^2-10 = 5-2x$

$x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$x=-5$ atau $x=3$

Cek syarat basis dan numerus

Jika $x=-5$

- $2x+1=-9$ (tidak memenuhi)
- $x^2-10=15$
- $5-2x=15$

Bukan solusi

Jika $x=3$

- $2x+1=7$
- $x^2-10=-1$ (tidak memenuhi)
- $5-2x=-1$ (tidak memenuhi)

Bukan solusi

∴ Tidak ada nilai x yang memenuhi persamaan tersebut

5. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\log_{x+1}(x^2+1) = \log_{x^2-5}(x^2+1)$

Solusi :

a. $x+1 = x^2-5$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3$ atau $x=-2$

Cek syarat basis dan numerus

Untuk $x=-2$

$x^2+1=5\ (memenuhi)$

$x+1=-1<0\ (tidak\ memenuhi)$

$x^2-5=-1<0\ (tidak\ memenuhi)$

Bukan solusi

Untuk $x=3$

$x^2+1=10\ (memenuhi)$

$x+1=4\ (\ memenuhi)$

$x^2-5=4\ (memenuhi)$

Solusi

b. $x^2+1=1$

$x^2=0$

$x=0$

Cek syarat basis dan numerus untuk $x=0$

$x^2+1=1\ (memenuhi)$

$x+1=1\ (\ memenuhi)$

$x^2-5=-5<0\ (tidak\ memenuhi)$

Bukan solusi

∴ Nilai x yang memenuhi persamaan $\log_{x+1}(x^2+1) = \log_{x^2-5}(x^2+1)$ adalah $x=3$

6. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^3 + 2 = 0$

Solusi :

Misal $y=\log_2 x$

Maka, $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0 \rightarrow$

$y^2-3y+2=0$

$(y-1)(y-2)=0$

$y=1$ atau $y=2$

Jika $y=1$

$1=\log_2 x \rightarrow x=2^1=2$

Jika $y=2$

$2=\log_2 x \rightarrow x=2^2=4$

∴ Himpunan penyelesaian persamaan tersebut adalah $\{2,4\}$

D. PERTIDAKSAMAAN LOGARITMA

Bentuk Pertidaksamaan Logaritma

a. Bilangan pokok $a>1$

1. $\log_a f(x) > \log_a g(x) \rightarrow f(x) > g(x)$ dengan $f(x), g(x) > 0$
2. $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \rightarrow f(x) \geq g(x)$ dengan $f(x), g(x) > 0$
3. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \rightarrow f(x) < g(x)$ dengan $f(x), g(x) > 0$
4. $\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \rightarrow f(x) \leq g(x)$ dengan $f(x), g(x) > 0$

b. Bilangan pokok $0<a<1$

1. $\log_a f(x) > \log_a g(x) \rightarrow f(x) < g(x)$ dengan $f(x), g(x) > 0$
2. $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \rightarrow f(x) \leq g(x)$ dengan $f(x), g(x) > 0$
3. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \rightarrow f(x) > g(x)$ dengan $f(x), g(x) > 0$
4. $\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \rightarrow f(x) \geq g(x)$ dengan $f(x), g(x) > 0$

Kesimpulan:

- Jika bilangan pokok(basis) $a>1$, hanya perlu memperhatikan numerus pada masing masing logaritma, gunakan tanda penghubung ketidaksamaan yang sama
- Jika bilangan pokok(basis) $0<a<1$, hanya perlu memperhatikan numerus pada masing masing logaritma, gunakan

tanda penghubung ketidaksamaan yang sama

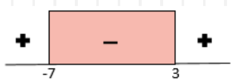
- Jika bilangan pokok(basis) $0 < a < 1$, hanya perlu memperhatikan numerus pada masing masing logaritma, gunakan tanda penghubung ketidaksamaan yang berlawanan
- Selalu cek numerus, setiap numerus harus bernilai positif

Contoh Soal

1. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $\log_3(x^2+x) \le \log_3(21-3x)$

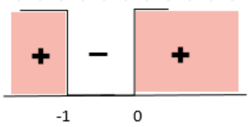
   Solusi :

   $x^2+x \le 21-3x$
   $x^2+4x-21 \le 0$
   $(x+7)(x-3) \le 0$
   $-7 \le x \le 3$

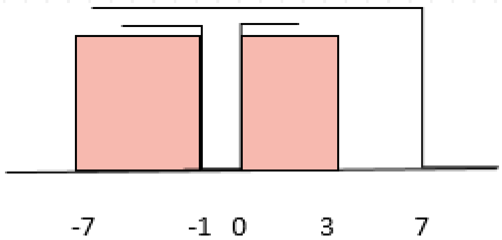
   Syarat numerous

   $x^2+x > 0$
   $x(x+1) > 0$
   $x < -1 \; atau \; x > 0$

   $21-3x > 0$
   $3x < 21$
   $x < 7$

   Daerah irisan ketiga hasil

   Penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah $-7 < x < -1$ atau $0 < x < 3$

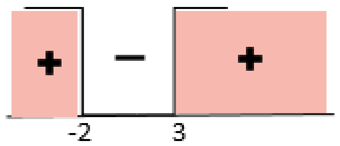
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan$(\log_{\frac{1}{2}}(x+1))^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 6 \ge 0$

   Solusi:

   Misal $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = y$, maka

   $(\log_{\frac{1}{2}}(x+1))^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 6 \ge 0 \rightarrow y^2 - y - 6 \ge 0$

   $(y-3)(y+2) \ge 0$

   $y \le -2 \; atau \; y \ge 3$

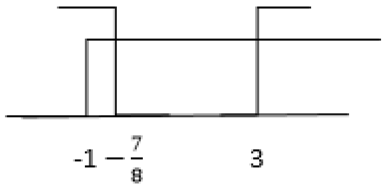
   a. $y \le -2 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \le -2$

   $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
   $x+1 \ge 4$
   $x \ge 3$

   b. $y \ge 3 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \ge 3$

   $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \ge \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$
   $x+1 \le \frac{1}{8}$
   $x \le -\frac{7}{8}$

   Syarat numerus : $x+1 > 0 \rightarrow x > -1$

E. GRAFIK FUNGSI LOGARITMA

Diberikan $f(x) = \log_a x$ dengan $a, x > 0$ dan $a \ne 1$

1. Jika $f(x)$ digeser ke kanan (searah sumbu x positif) sebesar b satuan, akan menghasilkan $g(x)$ dimana $g(x) = \log_a(x-b)$
2. Jika $f(x)$ digeser ke kiri (searah sumbu x negatif) sebesar b satuan, akan menghasilkan $g(x)$ dimana $g(x) = \log_a(x+b)$
3. Jika $f(x)$ digeser ke atas (searah sumbu y positif) sebesar c satuan, akan menghasilkan $g(x)$ dimana $g(x) = \log_a x + c$
4. Jika $f(x)$ digeser ke bawah (searah sumbu y negatif) sebesar c satuan, akan menghasilkan $g(x)$ dimana $g(x) = \log_a x - c$

Diberikan fungsi $y = \log_a(x+b) + c$

Asimtotnya garis $x = -b$

Diberikan fungsi $y = \log_a g(x)$

Nilai Maksimum dan Minimum:

a. Jika $a > 1$
   Nilai fungsi y maksimum saat numerus $g(x)$ maksimum
   Nilai fungsi y minimum saat numerus $g(x)$ minimum
b. Jika $0 < a < 1$
   Nilai fungsi y maksimum saat numerus $g(x)$ minimum
   Nilai fungsi y minimum saat numerus $g(x)$ maksimum